För INL

i strömmen

i imaginära

ameten

Om förvirrande

använd $j^2 = -1$

nov 18-10:00

Det finns en
koppling till
tentauppgift nr 9
på tentamen
den 23/10-2009

nov 18-10:01

Repetition från igår

Determinanter

- för volym i $\mathbb{R}^n$
- för att kolla linjärt oberoende
- för att se på om $A\bar{x}=\bar{b}$

nov 18-10:01

har unik lösning
för alla $\bar{b}$.

Explicit formel
för determinant
som är praktiskt
oanvändbar.

nov 18-10:01

Går att använda för $n=2$ och $n=3$.

Vi behöver andra metoder för $n \geq 4$.

Vet redan att den är multilinjär i kolonnerna.

nov 18-10:01

Från formeln ser vi att

$$\det(A) = \det(A^t)$$

Alltså är den också multilinjär i raderna.

nov 18-10:01

Kolonnoperation

lägg en multipel av en kolonn till en annan.

$$\det(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_j + \lambda \bar{u}_i, \ldots, \bar{u}_n)$$

nov 18-10:20

<u>Ex:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(-1)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+(-1)\cdot 1 \\ 3 & 1 & 1+(-1)\cdot 3 \\ 0 & 2 & -1+(-1)\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

nov 18-10:22

Alltså?

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+(-1)1 \\ 3 & 1 & 1+(-1)3 \\ 0 & 2 & -1+(-1)0 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

nov 18-10:25

Ju fler nollor vi får, desto lättare att beräkna determinanten.

nov 18-10:27

Andra typen kolonn operation: multiplikation av en kolonn med a ger multiplikation av determinanten med a.

nov 18-10:28

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 4\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nov 18-10:29

Vi hade redan
krävt att det
skulle byta tecken
om vi byter två
kolonner, dvs
vara alternerande

nov 18-10:31

Nu också alterne-
rande i raderna.

nov 18-10:32

Triangulära matriser

över-
triangulär

under-
triangulär.

nov 18-10:32

Enda möjligheten att inte få med en nolla när vi väljer ett element ur varje rad och varje kolumn är på diagonalen.

nov 18-10:34

Alltså blir

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

om A är triangulär.

Samma sak gäller för diagonalmatriser

$$\begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

nov 18-10:35

Obs!

$$\det(aA) = a^n \det(A)$$

där n är antal rader/kolonner.

nov 18-10:39

Exempel

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad -2 \quad -1 \qquad \det A =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad 3 \quad =$$

nov 18-10:40

$$= -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 2$$

nov 18-10:44

Metoden tar c:a

n^3 operationer

av typen multiplikation

och addition

$100! \approx 9.33 \cdot 10^{157}$

$100^3 = 10^6$

nov 18-10:46

Utveckling av determinanter

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

nov 18-11:05

Se på första raden

$(1\ 0\ 2) = 1\cdot(1\ 0\ 0)$

$+\ 0\cdot(0\ 1\ 0) + 2(0\ 0\ 1)$

Alltså kommer $\det A =$

$$= 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + 0\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

nov 18-11:06

$$+2\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

$$=1\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}$$

$$-0\cdot\det\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$+2\det\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$$

nov 18-11:08

Om det bara finns en etta och resten nollor på en rad måste vi välja den ettan för att få något som är $\neq 0$.

nov 18-11:09

Varför byta tecken i mitten?

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

nov 18-11:13

men

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & c \\ e & d & f \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

nov 18-11:15

Samma sak för senare kolumner

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & c & b \\ d & f & e \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a & b \\ f & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

nov 18-11:16

I allmänhet får vi byta tecken i varannan kolonn.

nov 18-11:17

Om vi utvecklar efter första raden tar vi bort den första raden och en kolonn i taget och vi får då n st det. av storlek $(n-1)\times(n-1)$

nov 18-11:18

Ex: Utveckla

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

efter första kolonnen

$$-1 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

nov 18-11:20

$$= (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-2) + (-1)(-1) + (-2) = -2 + 1 - 2 = -3$$

nov 18-11:22

Plus/minus

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

nov 18-11:25

Produktregel

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

nov 18-11:27

Men!

Inte + ! oftast

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

nov 18-11:27

Vid radoperationer kan vi multiplicera med motsvarande elementära matris.

Bra: determinanten ändras precis med en faktor det(E)

nov 18-11:29

$$\underline{\underline{\text{Ex}}} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

har determinant 1

och determinanten

ändras inte när vi

utför radoperation.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\boxed{2}} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

har determinant 2.

Samma som att utföra radoperation och att

nov 18-11:31

multiplicera med

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Radbyte;

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

och $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ har determinant -1

Om $A = E_1 E_2 \dots E_m$

$B = E_{m+1} \dots E_{m+k}$

$AB = E_1 E_2 \dots E_{m+k}$

nov 18-11:33

$$\Rightarrow \det(AB) =$$

$$|E_1||E_2| \cdots |E_{n+k}|$$

$$= (|E_1| \cdots |E_n|)(|E_{n+1}| \cdots |E_{n+k}|)$$

$$= \det A \cdot \det B$$

nov 18-11:35

Geometrisk tolkning

Volymsförändring

nov 18-11:36

Kom ihåg

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^4$

är <u>linjär</u> om

1. $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

2. $T(a\bar{u}) = aT(\bar{u})$

nov 18-11:36

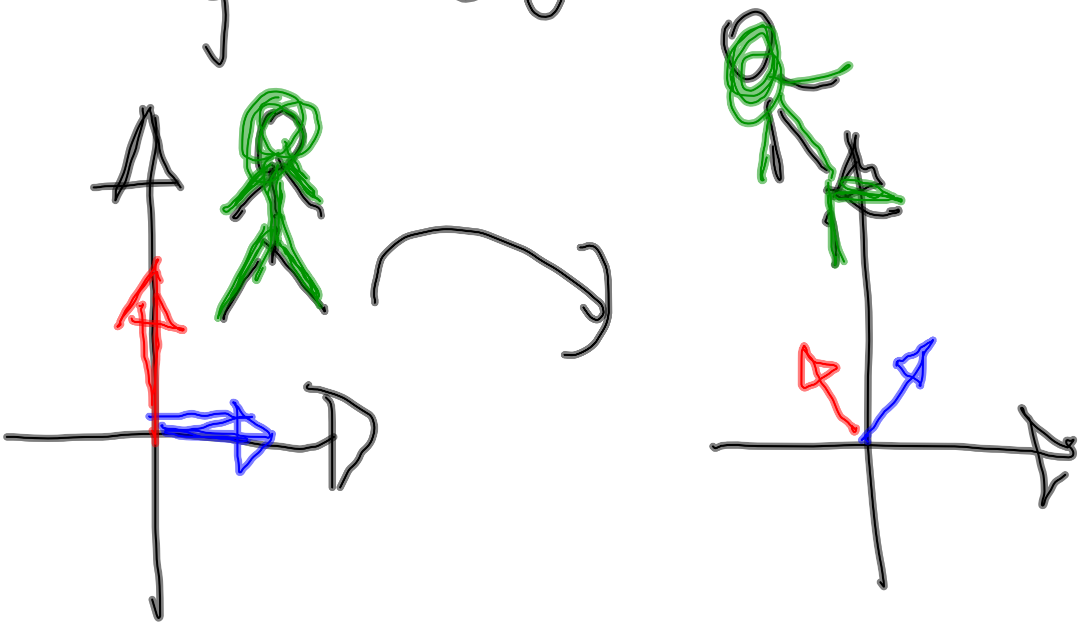
Vi kan uttrycka T som

$$T(\bar{u}) = A\bar{u}$$

där A är kvadratisk matris.

nov 18-11:37

Ex: Rotation i planet



Area ändras inte

dvs $|\det A| = 1$

nov 18-11:38

Vi vet att

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

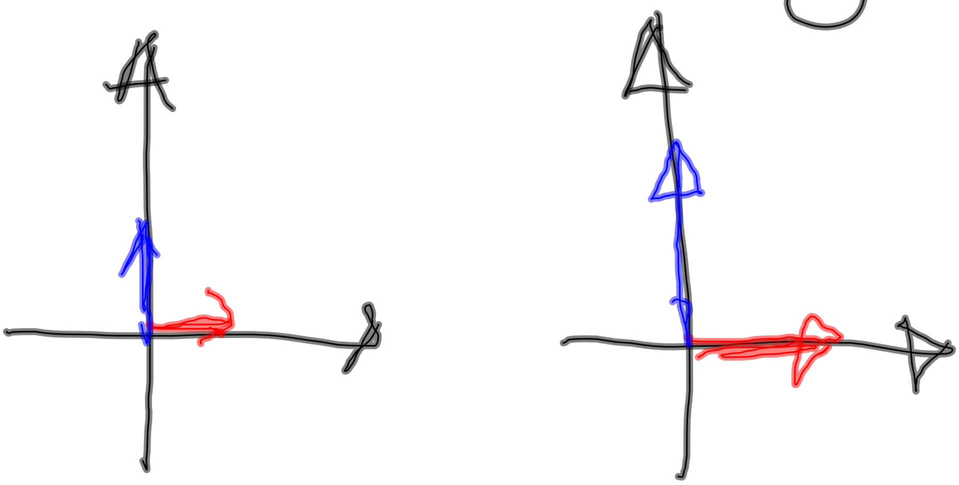
$$\det A = \cos\theta \cdot \cos\theta$$

$$-(-\sin\theta)\sin\theta =$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

nov 18-11:40

Ex Förstoring



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \cdot 2 = 4$$

nov 18-11:42

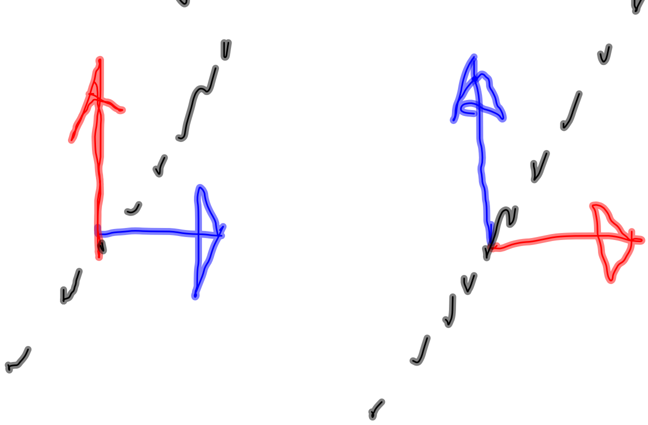
Spegling

Bevarar area

$$|\det A| = 1$$

men $\det A = -1$

eftersom



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -1$$

nov 18-11:44